

1 Limite en un point

Exercice 1 ★★ Diverses limites –

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[38]

Exercice 2 ★★★ Diverses limites –

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x} \sin x, \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$
2. $f(x,y) = \frac{1 - \cos(xy)}{xy^2}$
3. $f(x,y) = \frac{xy^4}{x^4+y^6}$
4. $f(x,y) = \frac{x^3y^4}{x^8+y^6}$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[40]

Exercice 3 ★★★ Limite d'une fonction de trois variables –

Déterminer si les fonctions suivantes admettent une limite en $(0,0,0)$, et éventuellement la déterminer.

1. $f(x,y,z) = \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$;
2. $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \frac{xyz^2}{x^2+y^4+z^6}$;
3. $g : U \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \frac{x^4+y^4-z^4}{x^2+y^2-z^2}$, où $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 \neq 0\}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3607]

2 Dérivées partielles, fonctions de classe \mathcal{C}^1

Exercice 4 ★ Calcul de dérivées partielles –

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[46]

Exercice 5 ★★ Composition –

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .

2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[47]

Exercice 6 ★★ Règle de la chaîne et primitive –

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la fonction u définie sur \mathbb{R}^2 par $u(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et calculer ses dérivées partielles.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3608]

Exercice 7 ★★ Continue et pas de dérivées partielles –

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 . Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[49]

Exercice 8 ★★★ Intégrale à paramètres avec borne qui varie –

Soit I et J deux intervalles (non réduits à un point) et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J , pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur I . On fixe $a \in I$ et $b : J \rightarrow I$ dérivable. Justifier que la fonction

$$\phi : x \mapsto \int_a^{b(x)} f(t, x) dt$$

est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3616]

Exercice 9 ★★★ Exemples –

Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
2. $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[51]

Exercice 10 ★★★ Exemples –

Les fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R}^2 , sont-elles de classe \mathcal{C}^1 ?

1. $f(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
2. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
3. $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[116]

Exercice 11 ★★★ Primitivation –

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

3 Différentielle

Exercice 12 ★ Matrices jacobiennes –

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

$$1. f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y \right).$$

$$2. f(x, y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2) \right).$$

Indication ▼ Correction ▼

[132]

Exercice 13 ★★ Différentielle d'une composée –

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Justifier que f et g sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de f et celle de g en (x, y) .

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

en calculant $f \circ g$; en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

3. en calculant $f \circ g$;

4. en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Indication ▼ Correction ▼

[2539]

Exercice 14 ★ Différentiable ? –

On définit sur \mathbb{R}^2 l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0, 0)$?

2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

3. f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Indication ▼ Correction ▼

[129]

Exercice 15 ★ Différentielle d'une composée et produit scalaire –

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $u : x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.

Indication ▼ Correction ▼

[3014]

Exercice 16 ★★ Différentielle de la fonction carré d'une matrice –

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼

[133]

Exercice 17 ★★ Différentiabilité de la norme euclidienne –

Soit E un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle $d\|\cdot\|(a)$ en chaque point $a \in E \setminus \{0\}$.

2. Démontrer que $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 18 ★★ ★★ Différentielle de la fonction inverse d'une matrice –

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrer que ϕ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Indication ▼ Correction ▼

[134]

Exercice 19 ★★ Différentielle sur un espace de polynômes –

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$. Soit $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$. Démontrer que ϕ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

Indication ▼ Correction ▼

[135]

4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exercice 20 ★ EDP dans le bon sens –

Etant données deux fonctions g_0 et g_1 d'une variable réelle, de classe C^2 sur \mathbb{R} , on définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = g_0\left(\frac{y}{x}\right) + xg_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Justifier que f est de classe C^2 , puis prouver que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Indication ▼ Correction ▼

[122]

Exercice 21 ★★ ★★ Contre-exemple de Peano –

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. f admet-elle un prolongement continu à \mathbb{R}^2 ?
2. f admet-elle un prolongement C^1 à \mathbb{R}^2 ?
3. f admet-elle un prolongement C^2 à \mathbb{R}^2 ?

Indication ▼ Correction ▼

[120]

Exercice 22 ★★ Laplacien d'une fonction radiale –

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On note $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Justifier que g est de classe C^2 sur U et que, pour tout $(x, y, z) \in U$, on a, en notant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\Delta g(x, y, z) = f''(\rho) + \frac{2}{\rho} f'(\rho)$$

où Δg désigne le laplacien de g .

Indication ▼ Correction ▼

[3606]

Exercice 23 ★★ ★★ Fonctions homogènes –

Soit f une application de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx, ty) = t^r f(x, y).$$

1. Montrer que si f est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.
2. Montrer que f est homogène de degré r , alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = rf(x, y).$$

Cette relation s'appelle la relation d'Euler.

3. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation d'Euler, on fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour $t > 0$, on pose $\varphi(t) = f(tx, ty)$.

Former une équation différentielle vérifiée par φ . En déduire que f est homogène de degré r .

4. Former une équation différentielle vérifiée par φ .

5. En déduire que f est homogène de degré r .

6. On suppose que f est de classe C^2 . Montrer que :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r(r-1)f(x, y).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[121]

5 Équations aux dérivées partielles

Exercice 24 ★★ EDP linéaire du premier ordre –

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

où f est une fonction inconnue de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On pose $\phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ qui est une bijection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(u, v) = f \circ \phi^{-1}(u, v)$$

de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = F \circ \phi(x, y) = F(ax + by, cx + dy).$$

Former une équation aux dérivées partielles vérifiée par F .

2. En choisissant astucieusement les réels a, b, c, d , déterminer F puis f .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3614]

Exercice 25 ★★ Avec un second membre –

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 16y.$$

Résoudre cette équation aux dérivées partielles en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[123]

Exercice 26 ★★ Applications dont la Hessienne est constante –

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dont la matrice hessienne est constante, c'est-à-dire pour lesquelles il existe des constantes a, b et c telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = c.$$

Exercice 27 ★★★ **Équation des cordes vibrantes –**

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Indication ▼ Correction ▼

[126]

Exercice 28 ★★★ **Fonctions harmoniques –**

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , est dite harmonique si son laplacien est nul, ie si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe C^3 . Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.

2. On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

Indication ▼ Correction ▼

[127]

6 Extrema

Exercice 29 ★ **DL à l'ordre deux –**

Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $a = (-1, 2)$ de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 y^3$.

Indication ▼ Correction ▼

[3601]

Exercice 30 ★ **Extrema locaux –**

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$;
2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

Indication ▼ Correction ▼

[140]

Exercice 31 ★★ **Extrema locaux d'une fonction de 3 variables –**

Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x + y + z)$.

Indication ▼ Correction ▼

[3610]

Exercice 32 ★★★ **Extrema locaux et globaux –**

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$;
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

Indication ▼ Correction ▼

[141]

Exercice 33 ★★☆☆ **Extrema dégénérés... –**

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes. Est-ce que ce sont des extrema globaux ?

1. $f(x, y) = x^2 + y^3$;
2. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$;
3. $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[142]

Exercice 34 ★★☆☆ **Extrema des fonctions de n variables –**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Déterminer les extrema locaux de f .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3611]

Exercice 35 ★★☆☆ **En détails –**

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ , le bord de D .
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D .
3. Déterminer les points critiques de f .
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ .
5. En déduire le minimum et le maximum de f sur D .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[144]

Exercice 36 ★★☆☆ **Extrema sur un compact –**

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K , et déterminer ce maximum.

1. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;
2. $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0, 1] \times [0, 1]$;
3. $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ et $K = [0, \pi/2]^2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[145]

Exercice 37 ★★☆☆ **Minimum sous contrainte et application aux probabilités –**

Pour $p, n \geq 2$, on note

$$\begin{aligned} K_p &= \{x \in [0, 1]^p : x_1 + \dots + x_p = 1\} \\ L_p &= \{x \in]0, 1[^p : x_1 + \dots + x_p = 1\} \\ f_p(x) &= x_1^n + \dots + x_p^n, \quad x \in K_p. \end{aligned}$$

1. Justifier que f_p admet un minimum sur K_p . Dans la suite, on notera

$$m_p = \min\{f_p(x) : x \in K_p\}.$$

2. Soit $y \in K_p$ tel que $f(y) = m_p$. Justifier que si $y \in L_p$, alors $y_1 = \dots = y_p = 1/p$.
3. On se place dans le cas $p = 2$. Démontrer que $m_2 = (1/2)^n$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $p \geq 2$, $m_p = (1/p)^n$.
5. Application : soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\{1, \dots, p\}$.

Démontrer que

$$P(X_1 = \dots = X_n) = (1/p)^n.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3618]

Exercice 38 ★★★★★ **Volume et surface d'une boîte –**

On désire fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boîte doit être égal à $0,5m^3$ et pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boîte ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[146]

Exercice 39 ★★★★★ **Extrema liés –**

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \exp(axy)$, $a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[147]

Exercice 40 ★★★★★ **Inégalité arithmético-géométrique –**

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$. On note $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

1. Démontrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[148]

Exercice 41 ★★★★★ **Loi de probabilité d'entropie maximale –**

Soit $n \geq 1$. On définit $f_n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k)$$

(où on a prolongé par continuité la fonction $x \mapsto x \ln(x)$, définie initialement sur $]0, +\infty[$, à $[0, +\infty[$, en la posant égale à 0 en 0). On pose également

$$X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

1. Démontrer que f_n admet un maximum sur X_n .
2. Démontrer que $\max(f_n(x) : x \in X_n) \leq \max(\ln(n), \max_{p \leq n-1}(\max(f_p(y) : y \in X_p)))$.
3. En déduire que $\max(f_n(x) : x \in X_n) = \ln(n)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3595]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Essayer, par des majorations, de voir si on peut obtenir une limite. Sinon, regarder la limite sur des droites ou des courbes, et essayer d'obtenir des limites différentes.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Il suffit d'étudier la fonction limite de chaque fonction coordonnée.
 2. Que vaut $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$?
 3. Étudier la limite de $f(t, t^\alpha)$ pour α bien choisi.
 4. Majorer $|x|$ par une certaine puissance de $x^8 + y^6$, et faire la même chose pour y .
-

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Comparer la limite le long de deux demi-droites bien choisies.
 2. Majorer chaque terme apparaissant dans le produit au numérateur par une puissance du dénominateur.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

Dériver par rapport à une variable comme si l'autre était constante !

Indication pour l'exercice 5 ▲

Appliquer le théorème de dérivation d'une fonction composée.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Introduire une primitive ϕ de φ .

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour l'étude de l'existence de dérivées partielles, revenir à la définition en utilisant la limite du taux d'accroissement.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Introduire $F(u, v) = \int_a^u f(t, v) dt$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Il suffit de démontrer que la fonction admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 , et que ces dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Indication pour l'exercice 10 ▲

Pour les deux premières, on pourra étudier la régularité des dérivées partielles en $(0, 0)$. Pour la dernière, on pourra commencer par étudier la régularité de la fonction d'une variable réelle g définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Intégrer d'abord une équation en fixant l'autre variable. La constante d'intégration dépend de cette variable. Dériver en utilisant l'autre relation pour l'éliminer...

Indication pour l'exercice 12 ▲

Indication pour l'exercice 13 ▲

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. $f(x, x) = \dots$;
 2. Calculer le taux d'accroissement.
 3. Utiliser une question précédente.
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

Indication pour l'exercice 16 ▲

Calculer $f(M + H) - f(M)$ pour revenir à la définition d'une différentielle.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Procéder à la main, ou utiliser la règle de la chaîne.
 2. Considérer $f(tu)$ avec h un vecteur non nul.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Exprimer, pour H petit, $(I_n + H)^{-1}$ comme somme d'une série géométrique.
 2. Se ramener à la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 19 ▲

Développer $\phi(P + H)$.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Il suffit d'appliquer le théorème de composition des dérivées.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Etudier la limite !
 2. Calculer les dérivées partielles, vérifier qu'elles existent en $(0, 0)$ et qu'elles sont continues.
 3. Nier le théorème de Schwarz.
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ puis $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ en utilisant la règle de la chaîne. On déduit ensuite les autres dérivées partielles par symétrie du rôle joué par les variables.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Poser $g(x, y) = f(tx, ty)$, et calculer de deux façons différentes les dérivées partielles par rapport à x et y .
2. Il suffit de dériver la relation par rapport à t et d'appliquer le résultat de la question précédente.
3. Dérivée une composée. Résoudre l'équation différentielle, puis utiliser que $f(x, y) = \varphi(1)$.
4. Dérivée une composée.
5. Résoudre l'équation différentielle, puis utiliser que $f(x, y) = \varphi(1)$.
6. Ecrire la relation d'Euler pour les dérivées partielles de f par rapport à x et y , combiner les relations trouvées, et appliquer encore la relation d'Euler à f .

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ en utilisant $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ et en utilisant la règle de la chaîne.
 2. On peut se ramener à $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$.
-

Indication pour l'exercice 25 ▲

Poser $F(u, v) = f(x, y) = f \circ \phi^{-1}(u, v)$ où $\phi(x, y) = (x + y, x - y)$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de F .

Indication pour l'exercice 26 ▲

Commencer par déterminer toutes les fonctions qui vérifient $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = a$. Puis, parmi ces fonctions, déterminer celles qui vérifient les autres égalités.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Faire comme l'énoncé le préconise, en posant $f(x, y) = F(u, v)$. Transformer l'équation aux dérivées partielles en équations aux dérivées partielles pour F , et ajuster a et b de sorte de se ramener à $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$.

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Il s'agit juste d'appliquer la définition, en permutant bien sûr à sa guise l'ordre des dérivations.
 2. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de φ' .
 3. Résoudre l'équation différentielle précédente.
-

Indication pour l'exercice 29 ▲

Utiliser la formule de Taylor-Young

Indication pour l'exercice 30 ▲

Il s'agit d'une application assez immédiate des résultats du cours. On cherche les points critiques, puis on étudie la nature de ces points critiques.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Chercher les points critiques (il y en a un seul), puis déterminer la matrice hessienne. Chercher les valeurs propres de la matrice hessienne.

Indication pour l'exercice 32 ▲

La recherche des extrema locaux se fait suivant la méthode habituelle. Pour étudier l'existence d'un extremum global, on pourra étudier $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ et démontrer que ceci garde un signe constant, ou bien étudier le comportement de f aux bords de l'ensemble de définition.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Pour toutes ces fonctions, on a affaire à des points critiques dégénérés. Il faut donc faire un développement limité autour du point pour savoir si on a affaire, ou non, à un extrémum. Pour vérifier que ce ne sont pas des extrema globaux, on pourra s'intéresser au comportement en l'infini de la fonction, suivant certaines directions.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Il faut appliquer la méthode usuelle : recherche des points critiques, étude des valeurs propres de la matrice hessienne. Évidemment, c'est plus compliqué parce qu'on est en dimension n !

Indication pour l'exercice 35 ▲

- 1.
 2. Compacité.
 - 3.
 4. Utiliser la paramétrisation du bord de Γ .
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

Dans chaque cas, l'existence vient du fait que l'on recherche le maximum d'une fonction continue sur un compact. Ce maximum peut être atteint ou bien sur le bord du compact, ou bien à l'intérieur. Dans ce cas, cela ne peut être qu'en un point critique...

Indication pour l'exercice 37 ▲

1. Argument de compacité.
 2. Utiliser le théorème d'optimisation sous contrainte.
 3. Considérer $y \in K_2$ tel que $f_2(y) = m_2$. Séparer le cas $y \in L_2$ et $y \notin L_2$.
 4. Raisonner comme à la question précédente. Le cas $y \notin L_p$ se ramène à m_{p-1} .
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 38 ▲

Notons x, y, z les trois dimensions. On doit minimiser une fonction de trois variables en x, y et z , sous la contrainte de $xyz = 0,5$. On peut donc remplacer z par son expression en fonction de x et de y , et rechercher le minimum d'une fonction de deux variables.

Indication pour l'exercice 39 ▲

Appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange, et démontrer que s'il y a un extremum lié, c'est forcément en $(1,1)$. Étudier précisément ce qui se passe en $(1,1)$.

Indication pour l'exercice 40 ▲

1. Commencer par prouver que Γ est compact, puis appliquer le théorème des extrema liés (ou d'optimisation sous contrainte).
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 41 ▲

1. Utiliser un argument de compacité.
 2. Discuter suivant la valeur d'un point où un maximum est atteint. Utiliser le théorème d'optimisation sous contraintes (ou théorème des extrema liés).
 3. Procéder par récurrence.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On a

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y|.$$

Puisque $|x| + |y|$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, f admet une limite en $(0, 0)$ qui est égale à 0.

2. Non ! On a en effet, pour tout $t > 0$, $f(t, 0) = 1$ et $f(0, t) = -1$. Si f admettait une limite en $(0, 0)$, alors puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, 0) = 1$, cette limite devrait être égale à 1, et puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(0, t) = -1$, elle devrait aussi être égale à -1 , ce qui est une contradiction.

3. Non ! En effet,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = +\infty$$

et donc f ne peut pas admettre de limite en $(0, 0)$.

4. On remarque que, pour tout $t > 0$, $f(t, 0) = 0$ alors que $f(t, t) = 1/2$. Puisque $(t, 0) \rightarrow 0$ et $(t, t) \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0, f ne peut pas admettre une limite en $(0, 0)$.

5. On va majorer $|f(x, y)|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour cela, on utilise $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. On en déduit que

$$|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Puisque $\sqrt{x^2 + y^2}$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que f admet pour limite 0 en $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1, f_2) . Or, $x^2 + y^2 - 1$ tend vers -1 , et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. f_1 tend donc vers -1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. D'autre part, on a

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais on a $\sin(x^2)/x^2 \rightarrow 1$ quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On en déduit que $f_2(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$, et donc $f(x, y)$ tend vers $(-1, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

2. Par un classique développement limité, on sait que $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ si $t \rightarrow 0$. Maintenant, on peut écrire

$$f(x, y) = x \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}.$$

De la remarque précédente, on tire que $\frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}$ tend vers $1/2$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. On en déduit que $f(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

3. Pour $t > 0$, on remarque que

$$f(t, t^{2/3}) = \frac{t \cdot t^{\frac{8}{3}}}{2t^4} = \frac{1}{2t^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty.$$

Ainsi, f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

4. On va majorer $|f(x, y)|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour cela, on remarque que

$$|x| \leq (x^8 + y^6)^{1/8} \text{ et } |y| \leq (x^8 + y^6)^{1/6}.$$

On en déduit

$$|f(x, y)| \leq \frac{(x^8 + y^6)^{\frac{3}{8} + \frac{4}{6}}}{x^8 + y^6} \leq (x^8 + y^6)^{\frac{1}{24}}.$$

Puisque $(x^8 + y^6)^{\frac{1}{24}}$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que f admet une limite en $(0, 0)$ égale à 0.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On a d'une part

$$f(x, 0, 0) = 0$$

et d'autre part

$$f(x, x, x) = \frac{2x^2}{6x^2} = \frac{1}{3}.$$

La limite de f en $(0, 0, 0)$ ne peut pas exister.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Alors on a

$$|x| \leq (x^2 + y^4 + z^6)^{1/2}$$

$$|y| \leq (x^2 + y^4 + z^6)^{1/4}$$

$$|z| \leq (x^2 + y^4 + z^6)^{1/6}$$

et donc

$$|f(x, y, z)| \leq \frac{(x^2 + y^4 + z^6)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}}}{x^2 + y^4 + z^6} \leq (x^2 + y^4 + z^6)^{\frac{1}{12}}.$$

Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque (x, y, z) tend vers $(0, 0, 0)$, on en déduit que f admet pour limite 0 en $(0, 0, 0)$.

3. C'est plus dur! L'idée est que si on choisit $x = y = t$, on va pouvoir simplifier le dénominateur en choisissant $z = \sqrt{2}t$ sans que le numérateur ne se simplifie. Bien sûr, on ne peut pas faire directement ce choix sinon on aurait $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ et il faut perturber un peu. On va perturber par une puissance plus grande que 4, pour avoir une puissance plus grande au dénominateur qu'au numérateur. On a donc, pour $t \neq 0$, et pour $(x, y, z) = (t, t, \sqrt{2}t + t^5)$,

$$x^4 + y^4 - z^4 = 2t^4 - (\sqrt{2}t + t^5)^4 = -2t^4 + o(t^4)$$

et

$$x^2 + y^2 - z^2 = 2t^2 - (\sqrt{2}t + t^5)^2 = -2\sqrt{2}t^5 + o(t^5).$$

Ainsi,

$$f(t, t, \sqrt{2}t + t^5) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}t}$$

et ceci tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0. On peut enfin remarquer que $f(t, t, t) = t^2 \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0 pour observer que f n'admet pas de limite, ni finie, ni infinie, en $(0, 0, 0)$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Pour tout réel y fixé, la fonction $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable sur \mathbb{R} , ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y.$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(xy) - y(x^2 + y^2) \sin(xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy).$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. La fonction $t \mapsto (2 + 2t, t^2)$ est de classe C^1 , car polynômiale, donc g est de classe C^1 par composition. On applique ensuite la formule de la dérivée d'une fonction composée. Si on note $u(t) = 2 + 2t$ et $v(t) = t^2$, alors

$$g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)),$$

soit

$$g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2).$$

2. La fonction $(u, v) \mapsto (uv, u^2 + v^2)$ est de classe C^1 car polynômiale, donc h est de classe C^1 . Notons $r(u, v) = uv$ et $q(u, v) = u^2 + v^2$. Le théorème de dérivation d'une composée dit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v), q(u, v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v), q(u, v)).$$

Ceci donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

De même on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Considérons ϕ une primitive de la fonction continue φ . ϕ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $u(x, y) = \phi(x + y) - \phi(x - y)$. Par composition, u est de classe C^1 . Par la règle de la chaîne, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \phi'(x + y) - \phi'(x - y) = \varphi(x + y) - \varphi(x - y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \phi'(x + y) + \phi'(x - y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

D'une part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'autre part, on a

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{1/4}.$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$. Du fait que $f(0, t) = 0$ pour tout réel t , f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. D'autre part, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = |t|^{-1/2}.$$

Ceci tend vers $+\infty$ si t tend vers 0, et donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

L'idée est d'introduire une variable supplémentaire, afin de dissocier la borne d'intégration et le paramètre à l'intérieur de l'intégrale. Pour $(u, v) \in I \times J$, on considère

$$F(u, v) = \int_a^u f(t, v) dt.$$

On va commencer par prouver que $\frac{\partial F}{\partial u}$ existe sur $I \times J$. Pour cela on fixe $v \in J$, et on remarque que $t \mapsto f(t, v)$ est continue sur I . Par le théorème fondamental du calcul intégral, $\frac{\partial F}{\partial u}$ existe et vaut pour tout $(u, v) \in I \times J$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = f(u, v).$$

Étudions maintenant l'existence de $\frac{\partial F}{\partial v}$. Fixons alors $u \in I$, avec par exemple $a \leq u$. Alors, pour tout $t \in [a, u]$, la fonction $v \mapsto f(t, v)$ est dérivable sur $[a, u]$ et sa dérivée est $\frac{\partial f}{\partial v}$. D'autre part, la fonction $(t, v) \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(t, v)$ est continue sur le compact $[a, u] \times K$. Elle est donc bornée sur ce compact et il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(t, v) \in [a, u] \times K$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(t, v) \right| \leq M.$$

Puisque la fonction constante égale à M est intégrable sur le segment $[a, u]$, il résulte du théorème de dérivation des intégrales à paramètres que $\frac{\partial F}{\partial v}$ existe et vaut pour tout $(u, v) \in I \times J$,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \int_a^u \frac{\partial f}{\partial v}(t, v) dt.$$

Pour conclure, on remarque que, pour tout $x \in J$,

$$\phi(x) = F(b(x), x).$$

D'après la règle de la chaîne, ϕ est dérivable sur J et pour tout $x \in J$,

$$\phi'(x) = b'(x)f(b(x), x) + \int_a^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Il suffit de démontrer que la fonction admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 , et que ces dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 .

1. D'une part, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2y^2 \frac{3x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. On a en effet :

$$f(x, 0) - f(0, 0) = 0,$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$. Mais on a, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\left| \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2|xy| \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right)^2 \leq 2|xy|,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{4} |3x^2 + y^2|.$$

On a également continuité de la dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$.

2. On commence par étudier la continuité de f en $(0,0)$ (même si ce n'est pas utile pour appliquer le théorème mentionné). On a

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &\leq x^2 y^2 |\ln(x^2 + y^2)| \\ &\leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2 |\ln(x^2 + y^2)| \\ &\leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \times (x^2 + y^2) |\ln(x^2 + y^2)|. \end{aligned}$$

Du fait que $u \ln u$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0^+ , on en déduit que f est continue en $(0,0)$. Ensuite, remarquons que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable ailleurs qu'en $(0,0)$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2}.$$

Pour étudier l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$, on étudie le taux d'accroissement

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \rightarrow 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On va maintenant prouver la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Le même raisonnement que pour la continuité de f (en utilisant par exemple $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$) prouve que $2xy^2 \ln(x^2 + y^2)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$. D'autre part,

$$\left| \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 |y|$$

ce qui prouve également que $\frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, et par suite sur \mathbb{R}^2 . Enfin, par symétrie des variables x et y , ce que l'on vient de démontrer est aussi valable pour les dérivées partielles par rapport à la deuxième variable. Ainsi, f est C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 10 ▲

On remarque d'abord que, dans les 3 cas, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. On a

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| \times \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|,$$

et $|x| \rightarrow 0$ lorsque $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$. De plus, un calcul facile montre que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En particulier, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = -1$ tandis que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a aucune chance d'être continue en $(0,0)$ (alors qu'on n'a même pas étudié l'existence d'une dérivée partielle en $(0,0)$!). Ainsi, f n'est pas de classe C^1 .

2. On a

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| \times \frac{x^2}{x^2 + y^2} + |y| \times \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, f est continue en $(0,0)$. D'autre part, un calcul facile montre que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Il vient, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut pas être continue en $(0,0)$ et f n'est pas C^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. On va commencer par étudier la régularité de la fonction d'une variable réelle g définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon. Clairement, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, on a $g'(t) = 0$ si $t < 0$ et $g'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-1/t}$ si $t > 0$. On a donc $g'(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$. On en déduit, par le théorème de prolongement d'une dérivée, que g

est de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $g'(0) = 0$. Maintenant, $f = g \circ \phi$ avec $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Par composition, f est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit f une solution du système, et soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g(x) = f(x, y)$. Alors la première relation s'exprime aussi par $g'(x) = xy^2$, soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + Cte$. Cette constante dépend de y , qui a été fixé le temps d'intégrer la relation. On en déduit l'existence de $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

Puisque f est C^1 , C est également C^1 et la deuxième relation donne

$$C'(y) = 0,$$

c'est-à-dire C est constante. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + A.$$

Réciproquement, une telle fonction est solution du système.

2. On reprend la même méthode, en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en posant $g(x) = f(x, y)$. De $g'(x) = e^xy$, on tire $g(x) = e^xy + Cte$. Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^xy + C(y)$. On dérive cette fois par rapport à y , et on trouve $C'(y) = 2y$, soit $C(y) = y^2 + Cte$. Ainsi, si f est solution, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = e^xy + y^2 + A.$$

Réciproquement, ces fonctions sont solutions.

3. Si on reprend la méthode des questions précédentes, on observe que si f est solution, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + C(y)$. On dérive par rapport à y , et en utilisant la deuxième relation, on trouve que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$C'(y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Or, si y est fixé, le membre de gauche est constant, et le membre de droite est un polynôme de degré 3 en x : ceci est impossible et donc l'équation n'a pas de solutions. On aurait pu aussi remarquer que, si on cherchait une fonction de classe C^2 , les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne pouvaient pas être égales, contredisant le théorème de Schwarz.

Correction de l'exercice 12 ▲

Il suffit de vérifier que les fonctions coordonnées sont différentiables, et elles sont clairement C^∞ . On a respectivement

1.

$$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. f et g sont clairement de classe \mathcal{C}^∞ comme composée de fonctions \mathcal{C}^∞ . De plus, en calculant les dérivées partielles, on montre facilement que

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 2x \cos(x^2 - y^2) & -2y \cos(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jac}_{(x,y)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $f \circ g(x, y) = \sin(4xy)$. On en déduit la matrice jacobienne de $f \circ g$ en (x, y) .

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = (4y \cos(4xy) \quad 4x \cos(4xy)).$$

Il vient

$$d(f \circ g)((x, y))(u, v) = \text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4uy \cos(4xy) + 4vx \cos(4xy).$$

D'après la formule de composition des différentielles, on sait que

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \text{Jac}_{g(x,y)}(f) \times \text{Jac}_{(x,y)}(g).$$

Mais,

$$\text{Jac}_{g(x,y)}f = (2(x+y) \cos(4xy) \quad -2(x-y) \cos(4xy)).$$

Le produit des deux matrices redonne alors le résultat précédent.

3. On a $f \circ g(x, y) = \sin(4xy)$. On en déduit la matrice jacobienne de $f \circ g$ en (x, y) .

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = (4y \cos(4xy) \quad 4x \cos(4xy)).$$

Il vient

$$d(f \circ g)((x, y))(u, v) = \text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4uy \cos(4xy) + 4vx \cos(4xy).$$

4. D'après la formule de composition des différentielles, on sait que

$$\text{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \text{Jac}_{g(x,y)}(f) \times \text{Jac}_{(x,y)}(g).$$

Mais,

$$\text{Jac}_{g(x,y)}f = (2(x+y) \cos(4xy) \quad -2(x-y) \cos(4xy)).$$

Le produit des deux matrices redonne alors le résultat précédent.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Remarquons que $f(x, x) = 1/2$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0 : f n'est pas continue en 0.
2. Puisque $f(x, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe, et vaut 0.
3. f ne peut pas être différentiable puisqu'elle n'est pas continue !

Correction de l'exercice 15 ▲

Notons $g(x) = \langle x, x \rangle$, de sorte que $u = g \circ f$. Par composée, $du_x(h) = dg_{f(x)} \circ df_x(h)$. Or, $dg_y(h) = 2\langle y, h \rangle$, ce qu'on peut retrouver en écrivant

$$\langle y + h, y + h \rangle = \langle y, y \rangle + 2\langle y, h \rangle + \|h\|^2.$$

On en déduit que $du_x(h) = 2\langle f(x), df_x(h) \rangle$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Remarquons déjà que f est de classe C^1 puisque f est polynômiale. Soient $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$f(M + H) - f(M) = (M + H)^2 - M^2 = HM + MH + H^2.$$

Posons $\phi(H) = HM + MH$. ϕ est linéaire et

$$f(M + H) - f(M) = \phi(H) + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est la différentielle de f en M .

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On va donner deux démonstrations possibles. La première méthode utilise la définition d'une fonction différentiable. Soit donc $h \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\|a+h\| &= \sqrt{\langle a+h, a+h \rangle} \\ &= \sqrt{\|a\|^2 + 2\langle a, h \rangle + \|h\|^2} \\ &= \|a\| \sqrt{1 + \frac{2\langle a, h \rangle}{\|a\|^2} + o(\|h\|)} \\ &= \|a\| \left(1 + \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|^2} + o(\|h\|) \right) \\ &= \|a\| + \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|} + o(\|h\|).\end{aligned}$$

On en déduit que $\|\cdot\|$ est bien différentiable en a et que

$$d\|\cdot\|(a)(h) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}.$$

On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant la règle de la chaîne. En effet, posons $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$, $h : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = \langle x, y \rangle$ et $i : E \rightarrow E \times E, i(x) = (x, x)$. Alors on a $\|\cdot\| = g \circ h \circ i$. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. Alors, puisque

i est différentiable en a h est différentiable en $i(a) = (a, a)$ g est différentiable en $h(i(a)) = \|a\|^2 > 0$,
on sait que $\|\cdot\|$ est différentiable en a et que

$$d\|\cdot\|(a) = dg(\|a\|^2) \circ dh((a, a)) \circ di(a).$$

Or, pour $h \in E$,

$$di(a)(h) = (h, h)$$

car i est une application linéaire,

$$dh((x, y))(h_1, h_2) = \langle x, h_2 \rangle + \langle h_1, y \rangle$$

car h est une application bilinéaire, d'où

$$dh((a, a))(h, h) = 2\langle a, h \rangle.$$

Enfin,

$$dg(x_0)(h) = hg'(x_0) = \frac{h}{2\sqrt{x_0}}$$

d'où l'on tire

$$dg(\|a\|^2)(2\langle a, h \rangle) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}.$$

On retrouve bien que

$$d\|\cdot\|(a)(h) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}.$$

2. i est différentiable en a

3. h est différentiable en $i(a) = (a, a)$

4. g est différentiable en $h(i(a)) = \|a\|^2 > 0$,

5. Considérons $u \in E$ non nul. Si $\|\cdot\|$ était différentiable en 0, alors la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \|tu\|$ serait dérivable en 0. Mais $f(t) = |t|\|u\|$ et ceci n'est pas dérivable en 0. Donc $\|\cdot\|$ n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 18 ▲

Remarquons avant de commencer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc il est bien possible de calculer la différentielle de ϕ en un élément de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < 1$. Alors

$$(I_n + H) \times \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k H^k \right) = I_n + (-1)^p H^{p+1}.$$

Puisque $\|H\| < 1$, $H^p \rightarrow 0$ et donc

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H^2 \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k.$$

On a

$$\|\psi(H)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|H\|^k = \frac{1}{1 - \|H\|} \leq 2$$

si $\|H\| \leq 1/2$. Ainsi, $\|H^2 \psi(H)\| \leq 2\|H\|^2 = o(\|H\|)$ et on a prouvé que

$$\phi(I_n + H) = \phi(I_n) - H + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est différentiable en I_n et sa différentielle vaut $d\phi_{I_n}(H) = -H$.

2. Prenons maintenant $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$(M + H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (M^{-1}H)^k M^{-1}$$

pourvu que $\|M^{-1}H\| < 1$. Il vient, par un raisonnement identique à celui de la première question,

$$\phi(M + H) = \phi(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est différentiable en M et $d\phi_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Soient $P, H \in E$. On a

$$\phi(P + H) = \int_0^1 (P(t) + H(t))^3 dt = \int_0^1 (P(t))^3 dt + 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt + \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = 3 \int_0^1 P(t)(H(t))^2 dt + \int_0^1 (H(t))^3 dt.$$

Or,

$$|\psi(H)| \leq 3 \int_0^1 |P(t)| dt \times \|H\|^2 + \|H\|^3.$$

Ainsi, $\psi(H) = o(\|H\|)$. Puisque $H \mapsto 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$ est linéaire, on a prouvé que ϕ est différentiable en P et que $d\phi_P(H) = 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$.

Correction de l'exercice 20 ▲

La fonction f est de classe C^2 comme composée de fonctions toutes de classe C^2 . On a ensuite, en notant $t = y/x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} g'_0(t) + g_1(t) - \frac{y}{x} g'_1(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2y}{x^3}g'_0(t) + \frac{y^2}{x^4}g''_0(t) + \frac{y^2}{x^3}g''_1(t) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x}g'_0(t) + g'_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}g'_0(t) - \frac{y}{x^3}g''_0(t) - \frac{y}{x^2}g''_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{x^2}g''_0(t) + \frac{1}{x}g''_1(t).\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de faire la somme demandée pour obtenir le résultat.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. En utilisant $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on obtient

$$|f(x,y)| \leq 2(x^2 + y^2) = 2\|(x,y)\|_2^2.$$

On en déduit que $f(x,y) \rightarrow 0$ lorsque $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Ainsi, f admet une limite en $(0,0)$ et on peut la prolonger par continuité en posant $f(0,0) = 0$.

2. Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) - f(0,0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De

$$|x^4 + 4x^2y^2 - y^4| \leq x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \leq 2(x^2 + y^2)^2,$$

on déduit que, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq 2|y|.$$

Ceci permet de démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ et prouve la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. L'étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est totalement similaire, puisque $f(x,y) = -f(y,x)$. On en déduit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. On va prouver que f ne peut pas être de classe C^2 en niant le théorème de Schwarz. En effet, on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1 . Mais on prouve de la même façon que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut

1. Les deux dérivées partielles croisées n'étant pas égales, la fonction ne peut pas être de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 22 ▲

Notons $h : U \rightarrow]0, +\infty[$, $(x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Alors h est de classe \mathcal{C}^2 (par composition...) et puisque $g = f \circ h$, g est de classe C^2 . On va calculer les dérivées partielles de g par la règle de la chaîne. D'abord, pour $(x,y,z) \in U$, notant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) \times f'(\rho) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).\end{aligned}$$

On dérive une deuxième fois :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{\rho - \frac{x^2}{\rho}}{\rho^2} f'(\rho) + \frac{x^2}{\rho^2} f''(\rho) \\ &= \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3} f'(\rho) + \frac{x^2}{\rho^2} f''(\rho).\end{aligned}$$

Par symétrie du rôle joué par les variables, on a aussi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{\rho^2 - y^2}{\rho^3} f'(\rho) + \frac{y^2}{\rho^2} f''(\rho) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{\rho^2 - z^2}{\rho^3} f'(\rho) + \frac{z^2}{\rho^2} f''(\rho).\end{aligned}$$

En faisant la somme de ces trois expressions, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta g(x, y, z) &= \frac{3\rho^2 - \rho^2}{\rho^3} f'(\rho) + f''(\rho) \\ &= \frac{2}{\rho} f'(\rho) + f''(\rho).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 23 ▲

1. On pose $g(x, y) = f(tx, ty)$. On a d'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty).$$

D'autre part, en utilisant la relation $g(x, y) = t^r f(x, y)$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = t^r \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

On en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

On fait de même avec la dérivée partielle suivant y .

2. Supposons d'abord que f est homogène de degré r . On a donc :

$$f(tx, ty) = t^r f(x, y).$$

On dérive cette relation par rapport à t . On trouve :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = r t^{r-1} f(x, y).$$

Le résultat vient en appliquant le résultat de la première question, qui dit que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $r - 1$.

3. Posons donc, pour $t > 0$, $\varphi(t) = f(tx, ty)$. φ est définie et dérivable sur $^*_+$. En utilisant la relation vérifiée par f , on a :

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \frac{r}{t} f(tx, ty) = \frac{r}{t} \varphi(t).$$

On résout cette équation différentielle classiquement et on vérifie qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = Ct^r$. On a donc

$$f(tx, ty) = Ct^r \text{ et } f(x, y) = \varphi(1) = C.$$

Ainsi, on a bien prouvé que $f(tx, ty) = t^r f(x, y)$ et ceci pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, f est bien homogène de degré r .

4. Posons donc, pour $t > 0$, $\varphi(t) = f(tx, ty)$. φ est définie et dérivable sur $^*_+$. En utilisant la relation vérifiée par f , on a :

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \frac{r}{t} f(tx, ty) = \frac{r}{t} \varphi(t).$$

5. On résout cette équation différentielle classiquement et on vérifie qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = Ct^r$. On a donc

$$f(tx, ty) = Ct^r \text{ et } f(x, y) = \varphi(1) = C.$$

Ainsi, on a bien prouvé que $f(tx, ty) = t^r f(x, y)$ et ceci pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, f est bien homogène de degré r .

6. En écrivant la relation d'Euler pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (qui sont homogènes de degré $r - 1$), on obtient

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (r - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

et

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (r - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

On ajoute alors x fois la première relation, et y fois la deuxième, puis on utilise la relation d'Euler pour f pour obtenir le résultat.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On va noter $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ les dérivées partielles respectives de F . D'après la règle de la chaîne, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial F}{\partial u}(ax + by, cx + dy) + c \frac{\partial F}{\partial v}(ax + by, cx + dy)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b \frac{\partial F}{\partial u}(ax + by, cx + dy) + d \frac{\partial F}{\partial v}(ax + by, cx + dy).$$

L'équation aux dérivées partielles devient

$$(2a - b) \frac{\partial F}{\partial u} + (2c - d) \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

2. Si on pose $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 2$, on a $ad - bc \neq 0$ et l'équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

On en déduit donc qu'il existe une fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(u, v) = H(v).$$

Revenant à f , on trouve $f(x, y) = H(x + 2y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, on vérifie facilement que toutes les fonctions qui s'écrivent ainsi sont solution. Remarquons qu'à aucun moment nous n'avons dû calculer la bijection réciproque !

Correction de l'exercice 25 ▲

Posons $\phi(x, y) = (x + y, x - y)$ qui est une bijection de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 . On pose aussi $F(u, v) = f \circ \phi^{-1}(u, v)$, de sorte que $f(x, y) = F \circ \phi(x, y) = F(x + y, x - y)$. On a alors par le théorème de dérivation d'une composée (règle de la chaîne), pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x + y, x - y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x + y, x - y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x + y, x - y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x + y, x - y). \end{aligned}$$

De plus, dans les nouvelles coordonnées, on vérifie facilement que

$$\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x &= (u+v)/2 \\ y &= (u-v)/2. \end{cases}$$

Ainsi, si f est solution de l'équation aux dérivées partielles initiales, F vérifie, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$2 \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 8 \frac{u+v}{2} + 16 \frac{u-v}{2} = 12u - 4v.$$

On résout cette équation en intégrant par rapport à v : il existe une fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(u, v) = 6uv - v^2 + H(u).$$

Revenant à f , on a prouvé que si f est solution de l'équation différentielle initiale, alors f s'écrit

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 6(x+y)(x-y) - (x-y)^2 + H(x-y) \\ &= 5x^2 + 2xy - 7y^2 + H(x-y). \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction s'écrivant ainsi est solution de l'équation aux dérivées partielles initiale.

Correction de l'exercice 26 ▲

On va commencer par déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , qui vérifient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = a.$$

Pour cela, posons $g = \frac{\partial f}{\partial x}$. Alors g vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial x} = a.$$

Ainsi, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) = ax + C(y).$$

On va encore intégrer cette égalité : il existe une fonction $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + C(y)x + D(y).$$

Puisque f est C^2 et que $f(0, y) = D(y)$, on obtient que f est \mathcal{C}^2 , puis calculant $f(1, y) = C(y) + D(y)$, on obtient que C est aussi de classe C^2 . Cherchons ensuite parmi les fonctions qui s'écrivent sous la forme précédente celles qui vérifient les deux autres conditions. On a d'une part

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = C'(y) = c.$$

Ainsi, il existe $d_1 \in \mathbb{R}$ tel que $C(y) = cy + d_1$. D'autre part, utilisant cette formule pour C ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = D''(y) = b,$$

et donc il existe $d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$D(y) = \frac{by^2}{2} + d_2y + d_3.$$

Finalement, on a prouvé que si f est solution du problème, alors f s'écrit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + cxy + d_1x + d_2y + d_3.$$

Autrement dit, f est un polynôme de degré 2 en les variables x et y . Réciproquement, il est facile de vérifier que ces fonctions sont bien solution du problème.

Correction de l'exercice 27 ▲

On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v),$$

où ϕ et ψ sont C^2 . La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Correction de l'exercice 28 ▲

1. Posons $g = \frac{\partial f}{\partial x}$. Alors, d'après le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0.$$

On prouve exactement de la même façon que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique. D'autre part, posons $h = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$. Alors,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

On trouve de même que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}.$$

Ainsi,

$$\Delta(h) = 2\Delta(f) + x\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0,$$

en vertu de la première partie de la question.

2. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2 + y^2) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2\varphi''(x^2 + y^2).$$

De même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4y^2\varphi''(x^2 + y^2).$$

En posant $t = x^2 + y^2$, on en déduit que, puisque $\Delta(f) = 0$,

$$\varphi'(t) + t\varphi''(t) = 0.$$

Ainsi, φ' est solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + y = 0$.

3. On résout l'équation différentielle précédente. Ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto C/x$. En intégrant, on trouve qu'il existe deux constantes $C, D \in \mathbb{R}$ de sorte que $\varphi(x) = C \ln(x) + D$. Ainsi, f s'écrit nécessairement $f(x, y) = C \ln(x^2 + y^2) + D$. Réciproquement, on vérifie que toute fonction de la forme précédente est harmonique.

Correction de l'exercice 29 ▲

On va utiliser la formule de Taylor-Young. Pour cela, on commence par calculer les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x^2y.$$

On évalue ces dérivées partielles en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -16, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -24, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12.$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a donc

$$f(x, y) = -16(x+1) + 12(y-2) + 8(x+1)^2 - 24(x+1)(y-2) + 6(y-2)^2 + o((x+1)^2 + (y-2)^2)$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$f(a+h) = -16h_1 + 12h_2 + 8h_1^2 - 24h_1h_2 + 6h_2^2 + o(h_1^2 + h_2^2).$$

Remarquez bien que les coefficients devant h_1^2 et h_2^2 sont la moitié des dérivées partielles respectives, mais pas celui devant h_1h_2 .

Correction de l'exercice 30 ▲

1. On commence par chercher les points critiques de f . Pour cela, on calcule les dérivées partielles par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x + 2x^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Un point (x, y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} -2x + 2x^3 &= 0 \\ 2y &= 0. \end{cases}$$

Les seules solutions de ce système sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. On a donc 3 points critiques et on va étudier la nature de chacun. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 + 6x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

En $(0, 0)$, on obtient donc, avec les notations usuelles, $r = -2$, $t = 2$ et $s = 0$, soit $rt - s^2 = -4 < 0$. Le point $(0, 0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f . En $(1, 0)$, on a $r = 4$, $t = 2$ et $s = 0$, soit $rt - s^2 = 8 > 0$. Le point $(1, 0)$ est un extrémum local, c'est même un minimum local puisque $r > 0$. L'étude en $(-1, 0)$ donne exactement le même résultat.

2. On procède exactement de la même façon. Cette fois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Un point (x, y) est un point critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Ce système implique $x^4 = x$, soit $x = 0$ ou $x = 1$. On en déduit facilement que les seuls points critiques de f sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Les dérivées partielles du second ordre sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3.$$

En $(0, 0)$, on a $r = 0$, $t = 0$ et $s = -3$, soit $rt - s^2 = -9 < 0$. Le point $(0, 0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f . En $(1, 1)$, on a $r = 6$, $t = 6$ et $s = -3$, soit $rt - s^2 = 27 > 0$. Puisque de plus $r > 0$, le point $(1, 1)$ est un minimum local de f .

3. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 8(x - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 8(x - y).$$

Les points critiques sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3 = 8(x - y) \\ -4y^3 = 8(x - y). \end{cases}$$

On en déduit que $x^3 = -y^3 = (-y)^3$. La fonction cube étant injective, ceci donne encore $x = -y$. Si on reporte ceci dans la première équation, on trouve $4x^3 = 16x$, soit

$$x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x - 2)(x + 2) = 0.$$

On en déduit que les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(2, -2)$ et $(-2, 2)$. Etudions maintenant la nature de ces points critiques. Les dérivées partielles du second ordre sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 8 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 8.$$

En $(2, -2)$, avec les notations usuelles, on a $r = 40$, $t = 40$ et $s = -8$. Cette fois, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc le point $(2, -2)$ est un minimum local pour f . La conclusion est identique en $(-2, 2)$. En $(0, 0)$, on a $r = -8$, $t = -8$ et $s = 8$, soit $rt - s^2 = 0$. On ne peut donc pas conclure directement. Mais, on remarque que $f(x, 0) = x^4 - 4x^2$ est négatif si x est petit, alors que $f(x, x) = 2x^4$ est toujours positif. Ainsi, $(0, 0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum puisque aussi près qu'on veut de $(0, 0)$, on a des points (x, y) avec $f(x, y) > f(0, 0)$ et d'autres points (x, y) avec $f(x, y) < f(0, 0)$.

Correction de l'exercice 31 ▲

On commence par rechercher les points critiques de f . Pour cela, on calcule les dérivées partielles et on trouve, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + y + z - 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y + x + z - 4, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z + x + y - 4.$$

On résout le système

$$\begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \\ x + y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

En faisant $(L1) - (L2)$ puis $(L2) - (L3)$, on trouve $x = y = z$, et finalement le seul point critique est $(1, 1, 1)$. Pour déterminer la nature de $(1, 1, 1)$, on va étudier la matrice hessienne de f . Pour cela, on observe que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 1.\end{aligned}$$

La matrice hessienne de f en $(1, 1, 1)$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche les valeurs propres de M . Un calcul simple donne

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2.$$

Les valeurs propres de M sont strictement positives, donc M est définie positive, et f admet un minimum local strict en $(1, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x - 6y.$$

Un point critique (x, y) vérifie donc $x = y$ et $y = -x^2$, soit $x^2 + x = 0$. On vérifie donc facilement que les seuls points critiques sont $(0, 0)$ et $(-1, -1)$. On calcule ensuite les dérivées au second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6.$$

En $(0, 0)$, avec les notations usuelles, $r = 0$, $t = -6$ et $s = 6$, soit $rt - s^2 < 0$: $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local pour f . En $(-1, -1)$, on a $r = -12$, $t = -6$ et $s = 6$, soit $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: f admet un maximum local en $(-1, -1)$. Ce maximum ne peut pas être un maximum global. En effet, $f(x, 0) = 2x^3$ tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$, et donc la fonction n'est pas majorée. Par conséquent, elle n'admet pas de maximum global.

2. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2 \ln y.$$

Un point critique (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} xy &= 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2 \ln y &= 0. \end{cases}$$

La première équation impose $x = 0$ (puisque l'on sait que $y > 0$), la deuxième équation donne $(\ln y)^2 + 2 \ln y = 0$. Posant $X = \ln y$, on obtient $X^2 + 2X = 0$ donc les solutions sont $X = 0$ et $X = -2$. Revenant à y , on trouve $y = 1$ et $y = e^{-2}$. f admet donc deux points critiques qui sont $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$. Étudions maintenant la nature de ces points critiques. Pour $(0, 1)$, on peut remarquer que $f(0, 1) = 0$ alors que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Ainsi, on a prouvé que $(0, 1)$ est un minimum global de f . Pour $(0, e^{-2})$, on calcule les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y} + 2 \frac{\ln y}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x.$$

Avec les notations usuelles, en $(0, e^{-2})$, on trouve $rt - s^2 = -4$ et donc $(0, e^{-2})$ n'est pas un extrémum local pour f .

3. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x.$$

Un point critique (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x. \end{cases}$$

On en déduit $x = x^9$ soit $x = 0$ ou $x^8 = 1$. On en déduit que les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. On calcule ensuite les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4.$$

Avec les notations usuelles, en $(0, 0)$, on a $r = 0$, $t = 0$ et $s = -4$ soit $rt - s^2 = -16$. $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. En $(1, 1)$, on a $r = 12$, $t = 12$ et $s = -4$, dont $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: $(1, 1)$ est un minimum local, et il en est de même de $(-1, -1)$. Pour déterminer si ce sont des minima globaux, on calcule

$$f(x, y) - f(1, 1) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 \geq 0,$$

et donc $(1, 1)$ est un minimum global. Il en est de même de $(-1, -1)$. On peut aussi utiliser une autre méthode plus abstraite pour démontrer que f admet au moins un minimum global. En effet, $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ (car $|xy| \leq x^2 + y^2$ par exemple). Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\|(x, y)\| \geq M \implies f(x, y) \geq 0$. Sur la boule fermée $K = \bar{B}(0, M)$, qui est un compact, la fonction f est continue, donc elle admet un minimum sur K en $(x_0, y_0) \in K$. Ceci signifie que pour tout $(x, y) \in K$, on a $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. Puisque $f(1, 1) = -2$ et que $f(x, y) \geq 0$ si $(x, y) \notin K$, on sait que $f(x_0, y_0) < 0$. Mais du fait que f est positive sur le complémentaire de K , on en déduit que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. Ainsi, f admet au moins un minimum global. Maintenant, un minimum global est un minimum local, donc (x_0, y_0) doit être égal à $(1, 1)$ ou à $(-1, -1)$. On conclut en remarquant que $f(1, 1) = f(-1, -1)$, et donc que ces deux points sont un minimum global pour f .

Correction de l'exercice 33 ▲

1. On commence par chercher les points critiques de f . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2.$$

La fonction f admet donc un seul point critique qui est $(0, 0)$. Or, $f(0, y) = y^3$ et cette quantité est tantôt positive, tantôt négative suivant le signe de y , même si y est très proche de 0. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extrémum, et f n'admet pas d'extrémum sur \mathbb{R}^2 .

2. Commençons par calculer les dérivées partielles au premier ordre et au second ordre de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

Un point (x, y) est critique si et seulement si $x = 0$ et $y^2 = 1$. Les deux points critiques de f sont donc $A(0, 1)$ et $B(0, -1)$. En ces deux points, avec les notations habituelles, $rt - s^2 = 0$. On a donc affaire à des points dégénérés. Étudions plus précisément ce qui se passe en $A(0, 1)$. Pour cela, on va faire un développement limité en posant $y = 1 + h$, h proche de 0. On a alors

$$f(x, 1 + h) = x^4 + (1 + h)^3 - 3(1 + h) - 2 = x^4 + h^3 + 3h^2 - 4.$$

Or, pour x et h proches de 0, $x^4 \geq 0$ et $3h^2 + h^3 \geq 0$ (au voisinage de 0, c'est le terme h^2 qui est prédominant). Ainsi, si x et h sont proches de 0, on a

$$f(x, 1+h) \geq -4 = f(0, 1).$$

Ainsi, $(0, 1)$ est un minimum local pour f . L'étude en $(0, -1)$ est similaire, mais cette fois on doit poser $y = -1 + h$. On a alors

$$f(x, -1+h) = x^4 - 3h^2 + h^3.$$

Cette fois, on remarque que $f(x, -1) = x^4 \geq 0 = f(0, -1)$ tandis que $f(0, -1+h) = -3h^2 + h^3 < 0$ si h est assez petit. Ainsi, $(0, -1)$ est un point selle. Par ailleurs, $(0, 1)$ n'est pas un minimum global. En effet, dans le cas contraire, la fonction f serait minorée. Mais $f(0, y) = y^3 - 3y - 2$ tend vers $-\infty$ si y tend vers $-\infty$, et donc la fonction f n'est pas minorée.

3. On fait le même travail pour f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 + 2yx - x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y - 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6y + 2x.$$

Si (x, y) est un point critique de f , on a nécessairement

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 0.$$

Or,

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + (x - y)^2,$$

et donc on a nécessairement $x = 0$ et $y = 0$ qui est effectivement un point critique. En ce point critique, on a $rt - s^2 = 0$, on ne peut donc pas conclure directement avec les théorèmes. L'étude ici est un peu plus difficile, car les coordonnées x et y sont mélangées. On va regarder ce qui se passe sur une droite en remarquant que

$$f(2t, t) = 5t^3.$$

Ceci est négatif si $t < 0$ et positif si $t > 0$, alors que $f(0, 0) = 0$. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de g , qui n'admet donc aucun extrémum local, et a fortiori aucun extrémum global.

Correction de l'exercice 34 ▲

On commence par rechercher les points critiques de f . Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i + 2 \sum_{k=1}^n x_k - 1.$$

Ainsi, x est un point critique de f si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$2x_i + 2 \sum_{k=1}^n x_k - 1 = 0.$$

En faisant la différence de deux telles équations, on trouve que, pour $i \neq j$, on doit avoir $x_i = x_j$. Reportant dans chaque équation, on trouve

$$x_i = \frac{1}{2(n+1)}$$

et il est facile de vérifier que le point $(1/2(n+1), \dots, 1/2(n+1))$ est un point critique de f . On va maintenant étudier la matrice hessienne de f en ce point. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 4$$

et pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 2.$$

La matrice hessienne de f en $(1/2(n+1), \dots, 1/2(n+1))$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \dots & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On va étudier les valeurs propres de M pour prouver qu'elle est définie positive. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 \\ -2 & \dots & 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 - 2(n-1) & -2 & \dots & -2 \\ \lambda - 4 - 2(n-1) & \lambda - 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 \\ \lambda - 4 - 2(n-1) & \dots & 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} C_1 + \dots + C_n \rightarrow C_1 \\ &= (\lambda - 4 - 2(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 \\ 1 & \dots & 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4 - 2(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4 - 2(n-1))(\lambda - 2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de M sont strictement positives, la matrice M est définie positive, et le point $(1/2(n+1), \dots, 1/2(n+1))$ est un minimum local de f .

Correction de l'exercice 35 ▲

1. Le domaine D est délimité par les deux paraboles d'équation $y = 1 - x^2$ et $y = x^2 - 1$. Son bord Γ comporte deux parties : la partie "haute", paramétrée par $y = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, et la partie basse, paramétrée par $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

2. Le domaine D est borné ; c'est très clair si on se réfère au dessin. Pour une preuve complète, on peut remarquer que si $(x, y) \in D$, alors on doit avoir $x^2 - 1 \leq 1 - x^2$, et donc $x^2 \leq 1 \iff x \in [-1, 1]$. Cela impose ensuite $y \in [-1, 1]$. D est de plus clairement fermé. C'est une partie compacte de \mathbb{R}^2 et f est une fonction continue sur D . f admet donc un minimum et un maximum sur D .

3. Pour déterminer les points critiques de f , on calcule d'abord les dérivées partielles du premier ordre. On trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy + 2x = 2x(1 - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x^2.$$

Un point (x, y) est un point critique si $(x, y) = (0, 0)$ ou si (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} 1 - y &= 0 \\ 2y &= x^2. \end{cases}$$

On en déduit assez facilement que f admet trois points critiques qui sont $(0,0)$, $(-\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, 1)$. Remarquons que seul $(0,0)$ est dans D .

4. On va étudier la paramétrisation du bord de D obtenue précédemment. Précisément, posons $g(x) = f(x, 1-x^2)$, pour $x \in [-1, 1]$ et $h(x) = f(x, x^2-1)$ pour $x \in [-1, 1]$. Les études de g et h vont nous permettre de déterminer les extrema de f sur Γ . On a, après simplifications,

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 2x^2 + 2x^4 \\ h(x) &= 1. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'étudier g , et par parité, on peut se restreindre à l'étudier sur $[0, 1]$. En calculant la dérivée, on voit facilement que g est décroissante sur $[0, 1/\sqrt{2}]$ et est croissante sur $[1/\sqrt{2}, 1]$. De plus, $g(0) = g(1) = 1$ et $g(1/\sqrt{2}) = 1/2$. On en déduit que le minimum de f sur Γ est $1/2$, et son maximum est 1.

5. Les extrema de f sur D sont ou bien atteints sur le bord, ou bien atteints en un extrémum local de f situé dans D , donc en un point critique de f dans D . Puisque $f(0,0) = 0$, on en déduit que f admet 0 comme minimum sur D , et 1 comme maximum.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. K est un ensemble fermé et borné (c'est un triangle). C'est donc une partie compacte de \mathbb{R}^2 . De plus, la fonction f étant polynomiale, elle est continue sur ce compact, donc elle y est majorée et elle atteint sa borne supérieure. Le maximum peut être atteint :

ou bien en un point du bord de K ; ou bien en un maximum local de f situé à l'intérieur de K .

Ici, on remarque que si (x,y) appartient à la frontière de K , alors ou bien $x = 0$, ou bien $y = 0$, ou bien $x + y = 1$. Dans tous les cas, on a $f(x,y) = 0$ alors que $f(1/4, 1/4) > 0$. Ainsi, le maximum ne peut être atteint qu'en un point à l'intérieur de K . On cherche donc les points critiques de f . Pour cela, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-2x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x-2y).$$

Un point critique situé à l'intérieur de K vérifie

$$\begin{cases} 1-2x-y = 0 \\ 1-x-2y = 0. \end{cases}$$

Le seul point critique situé à l'intérieur de K est donc $(1/3, 1/3)$. Comme un maximum local ne peut être atteint qu'en un point critique, c'est donc que f admet son maximum sur K en $(1/3, 1/3)$. Ce maximum est égal à $1/27$.

2. ou bien en un point du bord de K ;

3. ou bien en un maximum local de f situé à l'intérieur de K .

4. Le début du raisonnement est tout à fait similaire. Ensuite, on remarque que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 3x^2 > 0.$$

Ainsi, f ne peut pas admettre de point critique, et donc le maximum de f sur K ne peut être atteint qu'en un point du bord de K . Il suffit ensuite d'étudier le comportement de f sur le bord de K . On a d'une part $f(x,0) = x+x^3$ qui atteint son maximum en $(1,0)$, maximum valant 2. On a ensuite $f(x,1) = x+x^3$, qui atteint son maximum valant 2 en $(1,1)$. On a ensuite $f(0,y) = -y+y^3 \leq 2$ si $y \in [0,1]$, et $f(1,y) = 2-y+y^3 \leq 2$. Ainsi, le maximum de f sur K est égal à 2.

5. Le début du raisonnement est identique. On cherche ensuite les points critiques appartenant à l'intérieur de K , l'ouvert $U =]0, \pi/2[$ en remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y \sin(2x+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \sin(x+2y)$$

(on a utilisé la célèbre formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$). Un point (x,y) de U est un point critique si et seulement si on a

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases}$$

Puisque $x + 2y \in]0, 3\pi/2[$, on a nécessairement

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ x + 2y = \pi. \end{cases}$$

Ainsi, le point $(\pi/3, \pi/3)$ est le seul point critique de f dans U . On a $f(\pi/3, \pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. On étudie maintenant f sur le bord de K , ie on étudie $f(0, t)$, $f(t, 0)$, $f(\pi/2, t)$ et $f(t, \pi/2)$ pour $t \in [0, \pi/2]$. On remarque que $f(0, t) = f(t, 0) = 0$ et par symétrie du rôle joué par x et y , on peut se restreindre à l'étude de $f(\pi/2, t)$. Mais,

$$f(\pi/2, t) = \sin t \sin(t + \pi/2) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t),$$

dont le maximum pour $t \in [0, \pi/2]$ vaut $1/2$. Comme $\frac{1}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, on en déduit que f admet pour maximum sur K la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Correction de l'exercice 37 ▲

1. On commence par remarquer que $[0, 1]^p$ est une partie fermée de \mathbb{R}^p . De plus, $G_p = \{x \in [0, 1]^p : x_1 + \dots + x_p = 1\} = g_p^{-1}(\{1\})$, avec $g_p(x) = x_1 + \dots + x_p$, est aussi fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Puisque $K_p = [0, 1]^p \cap G_p$ est l'intersection de deux fermés, c'est un fermé. D'autre part, K_p est borné dans l'espace vectoriel de dimension finie \mathbb{R}^p : ainsi, K_p est une partie compacte. Comme f_p est continue sur K_p , à valeurs dans \mathbb{R} , elle est minorée et atteint son minimum.

2. Si $y \in L_p$, alors la restriction de f_p à L_p admet un minimum local en y . De plus, pour tout $x \in]0, 1[^p$, on a $\nabla g_p(x) = (1, \dots, 1) \neq 0$. Par le théorème d'optimisation sous contraintes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour $i = 1, \dots, p$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \lambda \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(y) \implies ny_i^{n-1} = \lambda.$$

La fonction $t \mapsto nt^{n-1}$ étant injective (car strictement croissante) sur $]0, 1[$, toutes les coordonnées de y sont égales et puisque $y_1 + \dots + y_p = 1$, on doit avoir $y_i = 1/p$ pour $i = 1, \dots, p$.

3. Soit $y \in K_2$ tel que $f_2(y) = m_2$. Si $y \in L_2$, on a $y_1 = y_2 = 1/2$ et donc $f(y) = 1/4$. Si $y \notin L_2$, alors on a $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$ ou $y_1 = 1$ et $y_2 = 0$. Dans les deux cas, $f_2(y) = 1 > 1/4$. On a donc bien prouvé que f_2 atteint son minimum en $(1/2, 1/2)$ et que $m_2 = 1/4$.

4. Soit $p \geq 3$. Supposons le résultat démontré au rang $p-1$ (il est vrai au rang 2) et prouvons-le au rang p . Soit $y \in K_p$ tel que $f_p(y) = m_p$. Si $y \in L_p$, alors $y_1 = \dots = y_p = 1/p$ et $f_p(y_p) = (1/p)^n$. Si $y \notin L_p$, alors un des y_i , disons y_p , est égal à 0 ou 1. Mais si $y_p = 1$, alors $f_p(y) = 1 > (1/p)^n$. Si $y_p = 0$, alors

$$f_p(y_1, \dots, y_p) = f_{p-1}(y_1, \dots, y_{p-1}) \geq m_{p-1} > (1/p)^n$$

puisque $(y_1, \dots, y_{p-1}) \in K_{p-1}$. Ainsi, f_p ne peut pas atteindre son minimum sur le bord de K_p et on a bien $m_p = (1/p)^n$.

5. Notons, pour $i = 1, \dots, p$, $x_i = P(X_j = i)$ (ceci ne dépend pas de $j \in \{1, \dots, n\}$). Alors on a

$$\begin{aligned} P(X_1 = \dots = X_n) &= \sum_{i=1}^p P(X_1 = \dots = X_n = i) \\ &= \sum_{i=1}^p P((X_1 = i) \cap \dots \cap (X_n = i)) \\ &= \sum_{i=1}^p P(X_1 = i) \times \dots \times P(X_n = i) \text{ (par indépendance)} \\ &= \sum_{i=1}^p x_i^n \\ &= f_p(x) \end{aligned}$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in K_p$. D'après les résultats précédents,

$$P(X_1 = \dots = X_n) \geq (1/p)^n.$$

Correction de l'exercice 38 ▲

Notons x, y et z les trois dimensions de la boîte. Son volume est donc $xyz = 0,5$. On désire minimiser la fonction

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

(on a enlevé la face du dessus). Remplaçant z par $1/2xy$, on doit donc chercher le minimum de la fonction de deux variables

$$g(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Les dérivées partielles de g sont

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2}.$$

On vérifie alors sans peine que le seul point critique de g sur l'ouvert U est $(1, 1)$. Reste maintenant à prouver que g admet bien un minimum global en $(1, 1)$ sur U . Pour cela, on peut remarquer que $g(1, 1) = 3$. De plus, si $x < 1/3$ ou $y < 1/3$, alors $g(x, y) > 3 = g(1, 1)$. On en déduit que

$$\inf\{g(x, y); (x, y) \in U\} = \inf\{g(x, y); (x, y) \in A\}$$

où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1/3 \text{ et } y \geq 1/3\}$. Mais de plus, si $(x, y) \in A$ vérifie $x > 3$ ou $y > 3$, alors $g(x, y) \geq 3 = g(1, 1)$. On en déduit que

$$\inf\{g(x, y); (x, y) \in U\} = \inf\{g(x, y); (x, y) \in K\}$$

où $K = [1/3, 3] \times [1/3, 3]$. Or K est compact et g est continue sur K , donc on sait que g admet un minimum sur K . Ce minimum sur K est aussi le minimum de g sur U . Or, g ne peut admettre qu'un minimum en un point critique. Donc g admet un minimum en $(1, 1)$. Ceci signifie que les trois dimensions sont $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1/2$.

Correction de l'exercice 39 ▲

Notons $g(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$. On commence par calculer les diverses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay \exp(axy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax \exp(axy), \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 1.$$

En un point (x, y) de G où f atteint un extrémum (sur G), les différentielles sont proportionnelles. On en déduit que

$$\frac{ay \exp(axy)}{3x^2 + 1} = \frac{ax \exp(axy)}{3y^2 + 1}$$

ce qui entraîne $3y^3 + y = 3x^3 + x$. La fonction $t \mapsto 3t^3 + t$ étant strictement croissante, on en déduit que l'on a nécessairement $x = y$. Il vient $x^3 + x - 2 = 0$, dont la seule racine réelle est $x = 1$. Il faut maintenant étudier ce qui se passe en $(1, 1)$. Y-a-t-il un extrémum ? Est-ce un minimum ? Un maximum ? En fait, il suffit de remarquer qu'en les points de $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ pour lesquels $|x|$ est grand, alors $|y|$ est grand lui aussi, mais x et y sont de signe opposés. Autrement dit,

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty, (x, y) \in G} f(x, y) = 0.$$

Ainsi, par compacité, la fonction admet forcément un maximum qui est atteint en $(1, 1)$.

Correction de l'exercice 40 ▲

1. On commence par remarquer que Γ est compact. En effet, Γ est clairement fermé. De plus, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = x_1 + \dots + x_n \leq 1$, et donc Γ est borné. C'est une partie compacte de \mathbb{R}^n et f , qui

est continue sur Γ , admet un maximum global sur Γ , atteint en a . De plus, puisque $f(x_1, \dots, x_n)$ s'annule si un des x_i est nul, il est clair que $a \in]0, +\infty[^n$. Posons $g(x) = x_1 + \dots + x_n$. Par le théorème des extrema liés (ou d'optimisation sous contraintes), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lambda.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{f(a)}{a_i}.$$

Puisque $f(a) \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$ et tous les a_i sont égaux (à $f(a)/\lambda$). Mais, puisque $a_1 + \dots + a_n = 1$, on en déduit que f atteint son maximum sur Γ en le point $(1/n, \dots, 1/n)$. Ce maximum vaut $1/n^n$.

2. La question précédente prouve que, si $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ satisfait $x_1 + \dots + x_n = 1$, alors

$$\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Dans le cas général, on se ramène à ceci en posant

$$x'_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

qui vérifie $x'_1 + \dots + x'_n = 1$. De $\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{1}{n}$, on déduit l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 41 ▲

1. L'ensemble X_n est une partie fermée de $[0, 1]^n$, puisque l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. Puisque $[0, 1]^n$ est compact, X_n est compact et comme f_n est une fonction continue sur $[0, 1]^n$, f_n admet un maximum sur X_n .

2. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point où le maximum est atteint. On distingue trois cas :

Soit tous les x_i sont dans $]0, 1[$. Posons alors

$$Y_n = \{(y_1, \dots, y_n) \in]0, 1[^n : y_1 + \dots + y_n = 1\}.$$

Alors $f_n|_{Y_n}$ admet un maximum en x . Or, la fonction f est différentiable sur $]0, 1[^n$, et son gradient en $x = (x_1, \dots, x_n)$ vaut

$$\nabla f(x) = -(\ln(x_1) + 1, \dots, \ln(x_n) + 1)$$

(on a utilisé que la dérivée de $x \ln(x)$ est $\ln(x) + 1$). De plus,

$$Y_n = \{y \in]0, 1[^n : g(y) = 1\}.$$

La fonction g est différentiable sur $]0, 1[^n$ et son gradient en $x = (x_1, \dots, x_n)$ vaut

$$\nabla g(x) = (1, \dots, 1).$$

D'après le théorème d'optimisation à contraintes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(y) = \lambda \nabla g(y)$. Ceci entraîne en particulier que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $-\ln(x_i) - 1 = \lambda$ et donc, par injectivité de la fonction logarithme, que tous les x_i sont égaux. Puisque leur somme fait 1, on a $x_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $f(x_1, \dots, x_n) = -n \times \frac{1}{n} \ln(1/n) = \ln(n)$. Soit un des x_i au moins est nul. Mais alors, quitte à permuter l'ordre des variables, il existe $p \in [1, n-1]$ tel que $x_i \neq 0$ si $1 \leq i \leq p$ et $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$. Mais alors

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f_p(x_1, \dots, x_p) \leq \max_{y \in X_p} f_p(y).$$

Soit un des x_i vaut 1. Mais alors tous les autres x_j sont égaux à 0 et on est ramené au cas précédent.

3. Soit tous les x_i sont dans $]0, 1[$. Posons alors

$$Y_n = \{(y_1, \dots, y_n) \in]0, 1[^n : y_1 + \dots + y_n = 1\}.$$

Alors $f_n|_{Y_n}$ admet un maximum en x . Or, la fonction f est différentiable sur $]0, 1[^n$, et son gradient en $x = (x_1, \dots, x_n)$ vaut

$$\nabla f(x) = -(\ln(x_1) + 1, \dots, \ln(x_n) + 1)$$

(on a utilisé que la dérivée de $x \ln(x)$ est $\ln(x) + 1$). De plus,

$$Y_n = \{y \in]0, 1[^n : g(y) = 1\}.$$

La fonction g est différentiable sur $]0, 1[^n$ et son gradient en $x = (x_1, \dots, x_n)$ vaut

$$\nabla g(x) = (1, \dots, 1).$$

D'après le théorème d'optimisation à contraintes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(y) = \lambda \nabla g(y)$. Ceci entraîne en particulier que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $-\ln(x_i) - 1 = \lambda$ et donc, par injectivité de la fonction logarithme, que tous les x_i sont égaux. Puisque leur somme fait 1, on a $x_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $f(x_1, \dots, x_n) = -n \times \frac{1}{n} \ln(1/n) = \ln(n)$.

4. Soit un des x_i au moins est nul. Mais alors, quitte à permuter l'ordre des variables, il existe $p \in [1, n-1]$ tel que $x_i \neq 0$ si $1 \leq i \leq p$ et $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$. Mais alors

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f_p(x_1, \dots, x_p) \leq \max_{y \in X_p} f_p(y).$$

5. Soit un des x_i vaut 1. Mais alors tous les autres x_j sont égaux à 0 et on est ramené au cas précédent.

6. On va démontrer ce résultat par récurrence forte sur n . Le résultat est clairement vrai pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons que le résultat est vrai pour tout $p = 1, \dots, n-1$. Alors on a

$$\begin{aligned} \max(f_n(x) : x \in X_n) &\leq \max(\ln(n), \max_{p \leq n-1} (\max(f_p(y) : y \in X_p))) \\ &\leq \max(\ln(n), \max_{p \leq n-1} \ln(p)) \\ &\leq \ln(n). \end{aligned}$$

De plus, $f_n(1/n, \dots, 1/n) = \ln(n)$ et donc on a bien $\max(f_n(x) : x \in X_n) = \ln(n)$. En élaborant un peu plus la démonstration, on peut vérifier que le maximum n'est atteint qu'en le point $(1/n, \dots, 1/n)$.
